

Προσέγγιση Διακριτού Προβλήματος Σακιδίου



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Υπάρχουν n διαφορετικά αντικείμενα με αξία c_i και βάρος a_i

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου

- Υπάρχουν n διαφορετικά αντικείμενα με αξία c_i και βάρος a_i
- Διαθέτουμε έναν σάκο που αντέχει συνολικό μέγιστο φορτίο b

- Υπάρχουν n διαφορετικά αντικείμενα με αξία c_i και βάρος a_i
- Διαθέτουμε έναν σάκο που αντέχει συνολικό μέγιστο φορτίο b
- Σκοπός μας είναι να βρούμε ποια αντικείμενα θα τοποθετήσουμε στο σάκο χωρίς να υπερβούμε το μέγιστο συνολικό φορτίο και μεγιστοποιώντας την συνολική αξία

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου - Γραμμικό πρόβλημα

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{αν } x_j \in s_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{αν } x_j \in s_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\max z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

Input: Σύνολο αντικειμένων A , Βάρη a_i , Κόστη c_i , μέγιστο φορτίο b

Output: Υποσύνολο αντικειμένων $S \subseteq A$

Κατάταξε τα αντικείμενα σύμφωνα με την ποσότητα $\frac{a_i}{c_i}$ σε φθίνουσα σειρά

$S \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ έως n **do**

if $b \geq a_i$ **then**

$S \leftarrow S \cup \{i\}$

$b \leftarrow b - a_i$

end if

end for

return S

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου - Παράδειγμα

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$
- Αξίες $c_1 = 2, c_2 = k, c_3 = k$
Βάρη $a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = k$
μέγιστο φορτίο k

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου - Παράδειγμα

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$
- Αξίες $c_1 = 2, c_2 = k, c_3 = k$
Βάρη $a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = k$
μέγιστο φορτίο k

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$
- Αξίες $c_1 = 2, c_2 = k, c_3 = k$
Βάρη $a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = k$
μέγιστο φορτίο k
- Κατάταξη $\frac{2}{1} > \frac{k}{k} = \frac{k}{k}$
Επιλογή πρώτα του αντικειμένου 1 όπου ο αλγόριθμος σταματά
αφού κανένα άλλο αντικείμενο δε χωρά επιπλέον. Συνολική αξία 2

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$
- Αξίες $c_1 = 2, c_2 = k, c_3 = k$
Βάρη $a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = k$
μέγιστο φορτίο k
- Κατάταξη $\frac{2}{1} > \frac{k}{k} = \frac{k}{k}$
Επιλογή πρώτα του αντικειμένου 1 όπου ο αλγόριθμος σταματά αφού κανένα άλλο αντικείμενο δε χωρά επιπλέον. Συνολική αξία 2
- Η βέλτιστη λύση είναι η επιλογή ενός από τα αντικείμενα 2, 3 με συνολική αξία k

- Τρία αντικείμενα $\{1, 2, 3\}$
- Αξίες $c_1 = 2, c_2 = k, c_3 = k$
Βάρη $a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = k$
μέγιστο φορτίο k
- Κατάταξη $\frac{2}{1} > \frac{k}{k} = \frac{k}{k}$
Επιλογή πρώτα του αντικειμένου 1 όπου ο αλγόριθμος σταματά αφού κανένα άλλο αντικείμενο δε χωρά επιπλέον. Συνολική αξία 2
- Η βέλτιστη λύση είναι η επιλογή ενός από τα αντικείμενα 2, 3 με συνολική αξία k
- Δεν φράσσεται ο προσεγγιστικός λόγος!

- Σύνολο αντικειμένων U

Πακετάρισμα Κάδων (Bin Packing)

- Σύνολο αντικειμένων U
- Ένα βάρος a_i για κάθε αντικείμενο $i \in U$

- Σύνολο αντικειμένων U
- Ένα βάρος a_i για κάθε αντικείμενο $i \in U$
- Μέγιστο φορτίο κάθε κάδου B

- Σύνολο αντικειμένων U
- Ένα βάρος a_i για κάθε αντικείμενο $i \in U$
- Μέγιστο φορτίο κάθε κάδου B
- Μια λύση είναι μια διαμέριση U_1, U_2, \dots, U_m των αντικειμένων του U τέτοια ώστε $\sum_{i \in U_j} a_i \leq B$ για $j = 1, \dots, m$

- Σύνολο αντικειμένων U
- Ένα βάρος a_i για κάθε αντικείμενο $i \in U$
- Μέγιστο φορτίο κάθε κάδου B
- Μια λύση είναι μια διαμέριση U_1, U_2, \dots, U_m των αντικειμένων του U τέτοια ώστε $\sum_{i \in U_j} a_i \leq B$ για $j = 1, \dots, m$
- Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό m των συνόλων της διαμέρισης

- Σύνολο αντικειμένων U
- Ένα βάρος a_i για κάθε αντικείμενο $i \in U$
- Μέγιστο φορτίο κάθε κάδου B
- Μια λύση είναι μια διαμέριση U_1, U_2, \dots, U_m των αντικειμένων του U τέτοια ώστε $\sum_{i \in U_j} a_i \leq B$ για $j = 1, \dots, m$
- Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό m των συνόλων της διαμέρισης
- Το πρόβλημα επιδέχεται πολυονυμικό αλγόριθμο επίλυσης αν θεωρήσουμε πως για κάθε αντικείμενο ισχύει $a_i > \frac{B}{3}$

- m ίδιοι επεξεργαστές

Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού - (Scheduling)

- m ίδιοι επεξεργαστές
- n ανεξάρτητες διεργασίες

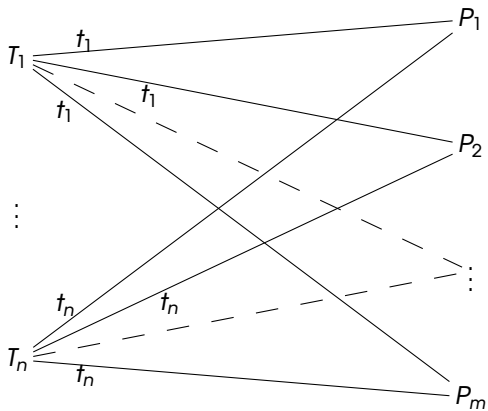
Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού - (Scheduling)

- m ίδιοι επεξεργαστές
- n ανεξάρτητες διεργασίες
- Χρόνοι εκτέλεσης t_1, t_2, \dots, t_n για κάθε δουλεία

- m ίδιοι επεξεργαστές
- n ανεξάρτητες διεργασίες
- Χρόνοι εκτέλεσης t_1, t_2, \dots, t_n για κάθε δουλειά
- Θεωρούμε πως μια διεργασία από την στιγμή που εκκινήσει πρέπει να παραμείνει για τον υπόλοιπο χρόνο εκτέλεσής της καθώς και πως κάθε επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί μονάχα μια διεργασία τη φορά

- m ίδιοι επεξεργαστές
- n ανεξάρτητες διεργασίες
- Χρόνοι εκτέλεσης t_1, t_2, \dots, t_n για κάθε δουλειά
- Θεωρούμε πως μια διεργασία από την στιγμή που εκκινήσει πρέπει να παραμείνει για τον υπόλοιπο χρόνο εκτέλεσής της καθώς και πως κάθε επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί μονάχα μια διεργασία τη φορά
- Σκοπός μας είναι μια ανάθεση δουλειών σε μηχανές που ελαχιστοποιεί τον χρόνο τερματισμού του τελευταίου επεξεργαστή

- m ίδιοι επεξεργαστές
- n ανεξάρτητες διεργασίες
- Χρόνοι εκτέλεσης t_1, t_2, \dots, t_n για κάθε δουλειά
- Θεωρούμε πως μια διεργασία από την στιγμή που εκκινήσει πρέπει να παραμείνει για τον υπόλοιπο χρόνο εκτέλεσής της καθώς και πως κάθε επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί μονάχα μια διεργασία τη φορά
- Σκοπός μας είναι μια ανάθεση δουλειών σε μηχανές που ελαχιστοποιεί τον χρόνο τερματισμού του τελευταίου επεξεργαστή
- Το πρόβλημα είναι NP-complete ακόμη και στην περίπτωση δύο επεξεργαστών $m = 2$



$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{αν } x_i \in s_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού - Γραμμικό πρόβλημα

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{αν } x_i \in s_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\max z = C_{max}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^n t_i x_{ij} \leq C_{max}$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

- **for** $i = 1$ έως n **do**
 Ανάθεσε την διεργασία i στον επεξεργαστή με το μικρότερο φορτίο
end for

- **for** $i = 1$ έως n **do**
 Ανάθεσε την διεργασία i στον επεξεργαστή με το μικρότερο φορτίο
end for

- π.χ. $n = 12, m = 4$

$$L = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 10 & 12 & 11 \\ \hline 7 & 5 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right.$$

- **for** $i = 1$ έως n **do**
 Ανάθεσε την διεργασία i στον επεξεργαστή με το μικρότερο φορτίο
end for

- π.χ. $n = 12, m = 4$

$$L = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 10 & 12 & 11 \\ \hline 7 & 5 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right.$$

- Προσεγγιστικός λόγος $\rho \leq 2 - \frac{1}{m}$

- Γράφος $G(V, E, w)$

- Γράφος $G(V, E, w)$
- Υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$

- Γράφος $G(V, E, w)$
- Υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$
- Μια λύση είναι ένα δένδρο $T(V', E')$ τέτοιο ώστε $M \subseteq V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

- Γράφος $G(V, E, w)$
- Υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$
- Μια λύση είναι ένα δένδρο $T(V', E')$ τέτοιο ώστε $M \subseteq V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
- Σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση του $w(E')$

- Γράφος $G(V, E, w)$
- Υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$
- Μια λύση είναι ένα δένδρο $T(V', E')$ τέτοιο ώστε $M \subseteq V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
- Σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση του $w(E')$
- Περιπτώσεις $|M| = 2$, $M = V$ επιδέχονται πολυονυμικό χρόνο επίλυσης

- Γράφος $G(V, E, w)$
- Υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$
- Μια λύση είναι ένα δένδρο $T(V', E')$ τέτοιο ώστε $M \subseteq V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
- Σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση του $w(E')$
- Περιπτώσεις $|M| = 2$, $M = V$ επιδέχονται πολυνομικό χρόνο επίλυσης
- Διαφορετικά το πρόβλημα είναι NP-hard !

Input: Γράφος $G(V, E, w)$, υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$

Output: Δένδρο T_{DNH} που εμπεριέχει κάθε κόμβο $v_m \in M$

Κατασκεύασε ένα πλήρη γράφο $G^a(M, E^a, w^a)$ όπου $w^a([u, v])$ ισούται με το κόστος του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τους κόμβους u και v στον γράφο G

Βρες το ελάχιστο δένδρο επικάλυψης T_1 του γράφου G^a

Αντικατάστησε κάθε ακμή $e \in T_1$ με το ελάχιστο μονοπάτι στο G δημιουργώντας έτσι τον γράφο G^b

Βρες το ελάχιστο δένδρο επικάλυψης T_2 του γράφου G^b

$T_{DNH} \leftarrow T_2$

while Υπάρχει κόμβος v στο δένδρο T_{DNH} που $v \notin M$ με βαθμό ίσο με ένα **do**

$T_{DNH} \leftarrow T_{DNH} - v$

end while

Input: Γράφος $G(V, E, w)$, υποσύνολο κόμβων $M \subseteq V$

Output: Δένδρο T_{DNH} που εμπεριέχει κάθε κόμβο $v_m \in M$

Κατασκεύασε ένα πλήρη γράφο $G^a(M, E^a, w^a)$ όπου $w^a([u, v])$ ισούται με το κόστος του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τους κόμβους u και v στον γράφο G

Βρες το ελάχιστο δένδρο επικάλυψης T_1 του γράφου G^a

Αντικατάστησε κάθε ακμή $e \in T_1$ με το ελάχιστο μονοπάτι στο G δημιουργώντας έτσι τον γράφο G^b

Βρες το ελάχιστο δένδρο επικάλυψης T_2 του γράφου G^b

$T_{DNH} \leftarrow T_2$

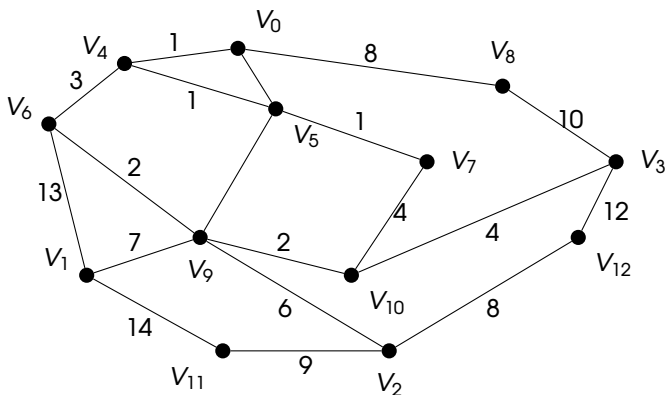
while Υπάρχει κόμβος v στο δένδρο T_{DNH} που $v \notin M$ με βαθμό ίσο με ένα **do**

$T_{DNH} \leftarrow T_{DNH} - v$

end while

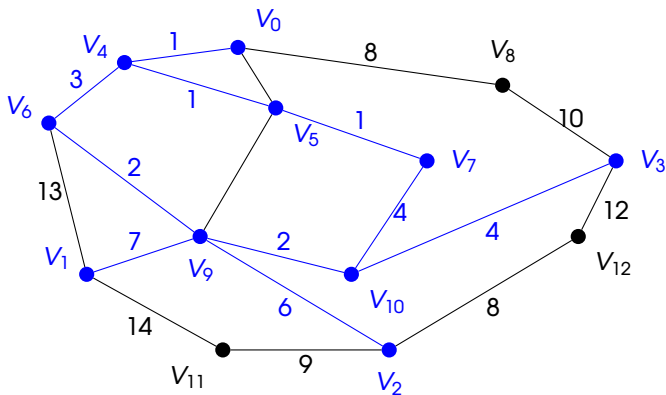
Χρονική Πολυπλοκότητα : $O(M|V|^2)$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$M = \{V_0, V_1, V_2, V_3\}$$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα

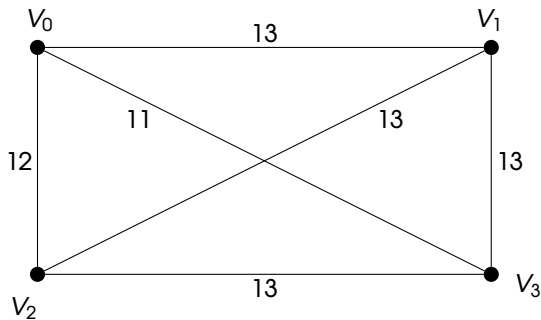


Κατασκευή G^a

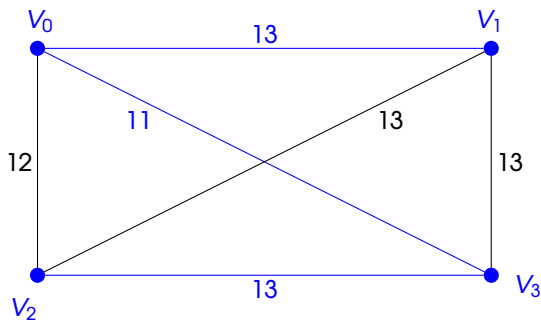
$$w^a(0, 1) = 13, w^a(0, 2) = 12, w^a(0, 1) = 11$$

$$w^a(1, 2) = 13, w^a(1, 3) = 13, w^a(2, 3) = 12$$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα

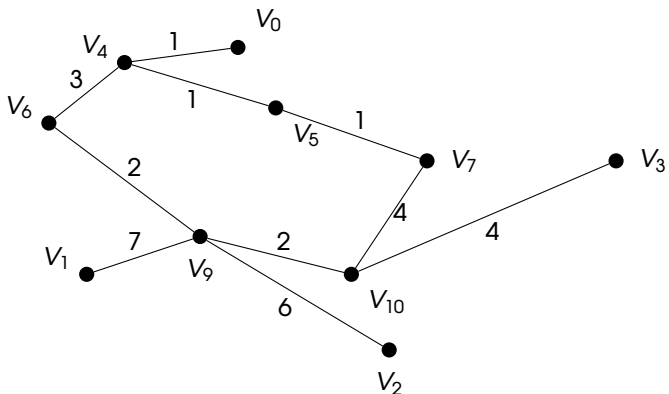


Γράφος G^a



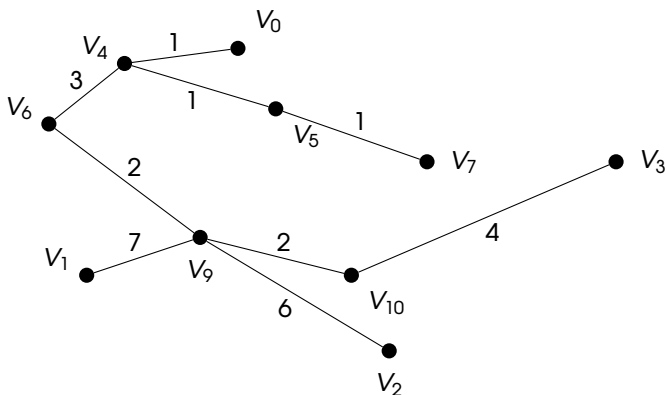
Ελάχιστο δένδρο επικάλυψης $T_1 = T^*(G^a)$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



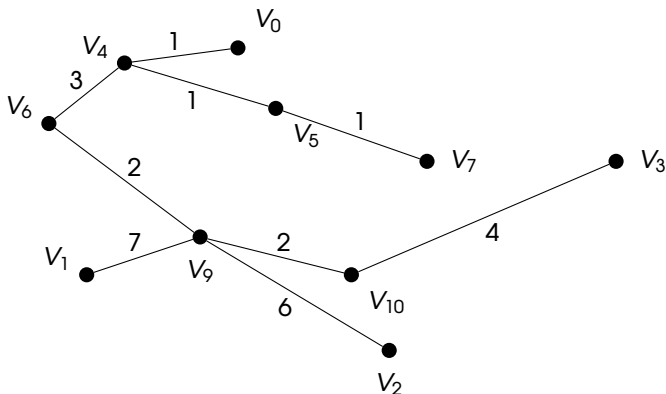
Γράφος G^b

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



Ελάχιστο δένδρο επικάλυψης $T_2 = T^*(G^b)$

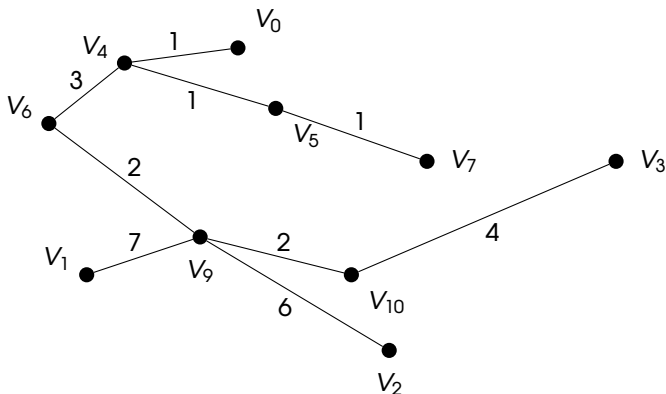
Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$d(V_4) = 2, d(V_5) = 2, d(V_6) = 2$$

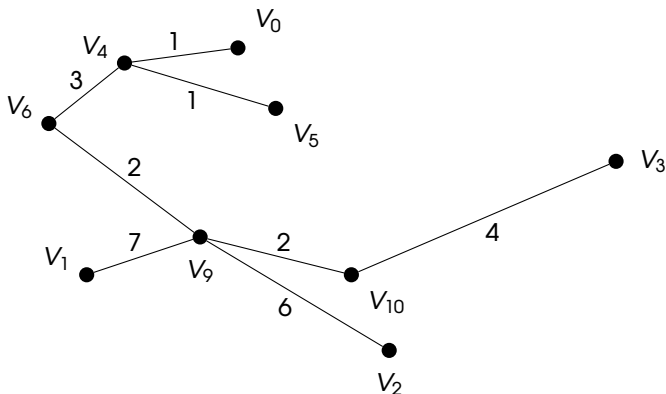
$$d(V_7) = 1, d(V_9) = 2, d(V_{10}) = 2$$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$d(V_4) = 2, d(V_5) = 2, d(V_6) = 2$$
$$d(V_7) = 1, d(V_9) = 2, d(V_{10}) = 2$$

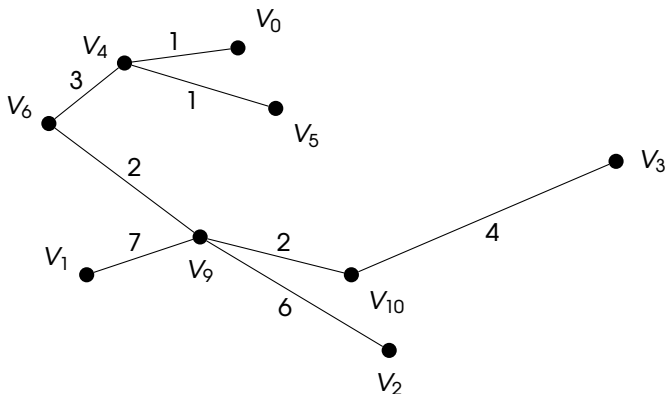
Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$d(V_4) = 2, d(V_5) = 2, d(V_6) = 2$$

$$d(V_9) = 2, d(V_{10}) = 2$$

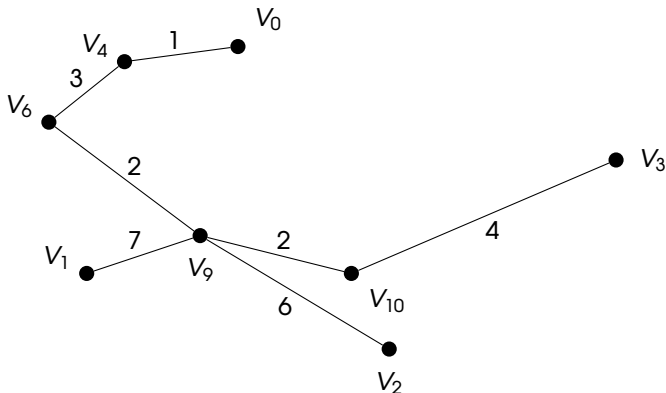
Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$d(V_4) = 2, d(V_5) = 2, d(V_6) = 2$$

$$d(V_9) = 2, d(V_{10}) = 2$$

Distance Network Heuristic- Παράδειγμα



$$d(V_4) = 2, d(V_6) = 2$$

$$d(V_9) = 2, d(V_{10}) = 2$$

Δένδρο T_{DNH}

